

19/10/15

$$a^n - \beta^n = (a - \beta) \left(\sum_{i=1}^n a^{n-i} \beta^{i-1} \right)$$

Από:

$$a^n - \beta^n = (a - \beta) \left(\sum_{i=1}^n a^{n-i} \beta^{i-1} \right) = \sum_{i=1}^n a^{n+1-i} \beta^{i-1} - \sum_{i=1}^n a^{n-i} \beta^i$$

$$= \underline{a^n \beta^0} + \sum_{i=2}^n a^{n+1-i} \beta^{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i} \beta^i - \underline{a^0 \beta^n}$$

$$i-1 = j \Rightarrow \boxed{i = j+1}$$

$$\sum_{i=2}^n a^{n+1-i} \beta^{i-1} = \sum_{j=1}^{n-1} a^{n+1-(j+1)} \beta^{(j+1)-1} = \sum_{j=1}^{n-1} a^{n-j} \beta^j, \text{ όπου αυτό ισούσε με}$$

το $\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i} \beta^i$. Άρα το ένα δίνει το άλλο.

Πρώτος:

$p \geq 1$ και διαίρεται μόνο από το 1 και το p .

Συμπέρασμα:

$n \in \mathbb{Z}^*$ ώστε υπάρχει a και $\beta \neq \pm 1$ ώστε $n = a \cdot \beta$.

Θεώρημα:

Κάθε φυσικός ≥ 1 διαίρεται από κάποιο πρώτο.

$$\left\{ \begin{array}{l} a|b \Leftrightarrow b = a \cdot c \text{ με } c \in \mathbb{Z} \\ \uparrow \\ \text{διαίρει} \end{array} \right.$$

a είναι πολλαπλό του a , άρα ο a είναι διαγόμενος του b

Ιδιότητες:

1) $\text{Ar } a|b \text{ και } b|a \Rightarrow |a| = |b|$

π.χ $3|-3 \text{ και } -3|3$

2) $n \text{ άρτιος} \Leftrightarrow n = 2k \Leftrightarrow 2|n$

3) $n \text{ περιττός} \Leftrightarrow n = 2k+1 \Leftrightarrow 2|n-1 \text{ ή } n+1$

Εγγραφή:

$\text{Ar } n = 4k+1 \text{ ή } n = 4k+3 \Rightarrow 8|n^2-1$

$n^2-1 = (4k+1)^2-1^2 = 4k(4k+2) = 4k \cdot 2(2k+1) = 8k(2k+1)$

Αρκούν για $n = 4k+3$

4) $\text{Ar } a|b \text{ και } a|c \Rightarrow a|b \pm c$ (το άραγεό δεν ισχύει)

$b = a \cdot a_1 \text{ και } c = a \cdot a_2$

$b \pm c = a \cdot a_1 \pm a \cdot a_2 = a(a_1 \pm a_2)$

5) $\text{Ar } a|b \text{ και } a|c \Rightarrow a|b \cdot c$ (το άραγεό δεν ισχύει)

6) $\text{Ar } a|b \cdot c \Rightarrow a|b \text{ ή } a|c$

$\text{Ar } a = \text{πρώτος} \Rightarrow a|b \cdot c \Leftrightarrow a|b \text{ ή } a|c$

$b \cdot c = a \cdot d$

↑
πρώτος

7) $\text{Ar } a|b \Rightarrow a^2|b^2$

Εγγραφή:

$\text{Ar το άθροισμα των ψηφίων ενός ακέραιου διαίρεται από το 3 ή 9, τότε αυτός διαίρεται από το 3 ή 9.}$

Αναλ.

Έστω $n = a_k \dots a_2 a_1$ (ψηφία όχι γινόμενο).

Π.χ] 1542

$n \geq 1$ με $a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1$ διαίρεται από 3 ή 9.

► Στο παράδειγμα: $1542 = 1 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2$

$$= 1 \cdot (999+1) + 5(99+1) + 4(9+1) + 2$$

$$= 1 \cdot 999 + 5 \cdot 99 + 4 \cdot 9 + 1 + 54 + 2, \text{ αυτό είναι το}$$

αθροισμα των ψηφίων. Άρα όλος ο αριθμός διαίρεται με το 3 ή το 9 μέσω της ιδιότητας που είδαμε παραπάνω.

► Ομοίως εργαζόμαστε και για την γενίκευση.

Ασκηση

1) Αν τα δύο τελευταία ψηφία ενός ακέραιου διαβούνται από 4, τότε ο αριθμός διαίρεται με το 4.

2) Αν το τελευταίο ψηφίο του ακέραιου n διαίρεται με το 5, τότε ο αριθμός διαίρεται με το 5.

Μαθηματική Επαγωγή.

$$1+2+3+\dots+100 = \underbrace{1+2+\dots+49+50+51+\dots+99+100}_{= \frac{(1+100) \cdot 100}{2}}$$

Μαυκοδικο 1575

De Morgan 1800

$$\boxed{\sum_{i=1}^n i = \frac{(1+n) \cdot n}{2}}, \quad \forall n \geq 1 \text{ με } n \in \mathbb{N}^*$$

Μαθηματική Πρόταση $P(n)$ μεταβλητή: $n \in \mathbb{N}^*$ πεδίου ορισμού.

Η μαθηματική επαγωγή λέει:

$$P(1), P(2), \dots, P(k), P(k+1)$$

Αποδείξω
αληθές

Υπόθεση
Αληθές

και
 $P(n)$

να αποδείξω αληθές τότε
αληθές, $\forall n$ στο πεδίο ορισμού του.

Άσκηση Μαθηματικής Επαγωγής

Έστω ότι η πρόταση $P(n)$ ορίζεται για τους φυσικούς $n \geq 0$.

Αν τα επόμενα δύο βήματα είναι αληθινά:

1) $P(n)$, Αληθής

2) Αν $P(k)$ αληθής για $k \geq n_0$, τότε και $P(k+1)$ αληθής

Τότε η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής, $\forall n \geq n_0$.

Π.Χ)

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}, \quad n \geq 1$$

Με επαγωγή:

$$n=1: \sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{(1+1) \cdot 1}{2} = 1 \quad \text{Ισχύει.}$$

$$n=2: \sum_{i=1}^2 i = \frac{(1+2) \cdot 2}{2} = 3 \quad \text{Ισχύει.}$$

Υποθέτουμε

ότι ισχύει για k :

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{(k+1) \cdot k}{2} \quad \text{και θα το δείξω για } k+1$$

Απόδειξη:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1+1)(k+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^k i + (k+1) = \frac{(k+1) \cdot k}{2} + (k+1) = \frac{(k+1) \cdot k + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot k + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1+1)(k+1)}{2} \quad \text{Αληθής.}$$

Π.Χ1

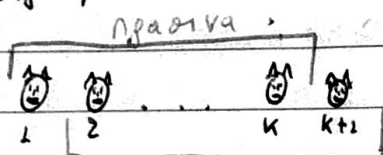
$P(n) = n$ άτομα έχουν το ίδιο χρώμα.

Να δείξουμε ότι $p(n)$ αληθής, $\forall n \geq 1$.

$p(1) =$ έχει το ίδιο χρώμα.

Υποθέσω για $p(k)$ αληθής, θα αποδείξουμε ότι $p(k+1)$ αληθής.

Με μαθηματική επαγωγή (Μ.Ε.) όλα τα άτομα έχουν το ίδιο χρώμα.



τώρα παίρνω αυτά τα k . Άρα αφού υπάρχουν κοινά άτομα, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.

► Λάθος γιατί η επαγωγή εδώ ξεκινάει από το 2.

$$3 \mid 2^n - 1, n \geq 1$$

$$(2^n)^n - 1^n = (2^n - 1) \left(\sum_{i=1}^n (2^n)^{n-i} \right)$$

$$\text{για } n=1: 2^2 - 1 = 3 \text{ Ισχύει}$$

$$\text{για } n=2: 16 - 1 = 15 \text{ Ισχύει}$$

Υποθέτουμε για $k: 3 \mid 2^{2k} - 1 \Leftrightarrow 2^{2k} - 1 = 3$

$$\begin{aligned} \text{Θα αποδείξουμε: } 3 \mid 2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1 = 2^2 \cdot 2^{2k} - 1 = 4 \cdot 2^{2k} - 1 = \\ &= 3 \cdot 2^{2k} + 2^{2k} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Επειδή } 3 \mid 3 \cdot 2^{2k} \text{ και } 3 \mid 2^{2k} - 1 \Rightarrow 3 \mid 3 \cdot 2^{2k} + 2^{2k} - 1 = p(k+1)$$

$$2n+1 < 2^n, n \geq 3$$

$$n=3: 2 \cdot 3 + 1 = 7 < 2^3 = 8 \text{ Ισχύει}$$

$$n=4: 2 \cdot 4 + 1 = 9 < 2^4 = 16 \text{ Ισχύει}$$

Υποθέσω για $k: 2k+1 < 2^n$ Ισχύει.

Θέτουμε $2(k+1)+1 < 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } 2(k+1)+1 &= 2k+2+1 = \underbrace{2k+1}_{< 2^k} + \underbrace{2}_{< 2^k} < 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k \text{ Ισχύει.} \end{aligned}$$